- **La duración del examen será de 1h y 30 minutos.**
- **Las notas y la fecha de la revisión se publicarán en Moodle.**

Problema 1 (5 Puntos)

Sea la ecuación $x^2 = \cos(x)$. Se quiere calcular un valor aproximado de una raíz $s \in [a, b]$ utilizando el método de Newton, a partir de un punto inicial x_0. Se pide:

a. Comprobar que la ecuación anterior tiene al menos una raíz s en el intervalo $[0.5, 1]$.

b. Sea $x_0 \in [0.5, 1]$ un punto de arranque, comprobar que el método de Newton es convergente. Dar la expresión del método iterativo aplicado al cálculo de la raíz s.

c. Sean $x_0 = 0.5$ y $e_n = |x_n - s|$ el error en la iteración n-ésima.

- Calcular las dos primeras iteraciones del método de Newton, x_1 y x_2 (con 6 cifras decimales).
- Con la aproximación $e_n \cong |x_{n+1} - x_n|$ calcular las estimaciones del error e_0 y e_1.
- Con la aproximación $e_{n+1} \cong C e_n^2$ calcular una estimación del error e_2. Calcular una estimación del error e_3 (sin realizar ninguna iteración más).
- Comprobar que se verifica la cota $e_n \leq 2^{-2^n}$ n=1, 2, 3,… ¿Cuántas iteraciones son necesarias para aproximar la raíz s con 15 cifras de precisión? ¿Se verifica esta cota para la estimación e_3 obtenida?

Nota: Los valores de las funciones seno y coseno en 0.5 y 1 son los siguientes: sin(0.5)=0.4794, sin(1)=0.8414, cos(0.5)=0.8775, cos(1)= 0.5403.

Problema 2 (5 Puntos)

Dado el sistema de ecuaciones lineales Ax=b donde A admite una descomposición L-U tal que A=LU y siendo:

$$b = \begin{pmatrix} 47.0 \\ 59.2 \end{pmatrix} \qquad L = \begin{pmatrix} 1.0 & 0.0 \\ 0.0056 & 1.0 \end{pmatrix} \qquad U = \begin{pmatrix} 5.31 & -6.10 \\ 0.0 & 58.9345 \end{pmatrix}$$

a) Resolver el sistema Ax=b utilizando las matrices L y U

b) Si nos proporcionan una solución aproximada $x' = \begin{pmatrix} 30 \\ 0.9 \end{pmatrix}$ del sistema perturbado Ax'=b' , calcular la variación en el término independiente (b'-b).

c) A partir de los resultados de los apartados anteriores dar una estimación del condicionamiento de A para la norma infinito. Comentar los resultados obtenidos.

Problema 1: Solución

Se quiere calcular las raíces en el intervalo $[0.5, 1]$ de la función continua $f(x) = x^2 - \cos(x)$, cuyas derivadas son $f'(x) = 2x + sen(x)$ función creciente en el intervalo $[0.5, 1]$ y $f''(x) = 2 + \cos(x)$ función decreciente en el intervalo $[0.5, 1]$.

a) $f(0.5) = 0.5^2 - \cos(0.5) = 0.25 - 0.87 < 0$, $f(1) = 1^2 - \cos(1) = 1 - 0.54 > 0$.

Luego f continua y $f(0.5)f(1) < 0$, por tanto f tiene una raíz $s \in [0.5, 1]$.

b) Como $x_0 \in [0.5, 1]$, $s \in [0.5, 1]$ tenemos que $e_0 = |x_0 - s| \leq 0.5$

$$M = \frac{\max_{x\in[0.5,1]} |f''(x)|}{2 \min_{x\in[0.5,1]} |f'(x)|} = \frac{\max_{x\in[0.5,1]} |2+\cos(x)|}{2 \min_{x\in[0.5,1]} |2x + sen(x)|} = \frac{2+\cos(0.5)}{2(2\times 0.5 + sen(0.5))} \simeq 0.9725$$

$Me_0 \leq 0.9725/2 < 1/2 < 1$. Por tanto, el método de Newton es convergente. La expresión del método es la siguiente:

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - \cos(x_n)}{2x_n + sen(x_n)}$$

c) Sea $x_0 = 0.5$, entonces $x_1 = x_0 - \dfrac{x_0^2 - \cos(x_0)}{2x_0 + sen(x_0)} = 0.5 - \dfrac{0.5^2 - \cos(0.5)}{2\times 0.5 + sen(0.5)} \simeq 0.924206$

$$x_2 = x_1 - \frac{x_1^2 - \cos(x_1)}{2x_1 + sen(x_1)} \simeq 0.829105$$

Con la aproximación $e_n \cong |x_{n+1} - x_n|$ tenemos $e_0 \cong |x_1 - x_0| \cong |0.924206 - 0.5| \cong 0.424206$ y

$e_1 \cong |x_2 - x_1| \cong |0.924206 - 0.829105| \cong 0.095101$

Con la aproximación $e_{n+1} \cong Ce_n^2$ tenemos $e_1 \cong Ce_0^2$, $\quad C \cong e_1/e_0^2 \simeq 0.528482$ y

$e_2 \cong Ce_1^2 \simeq 0.528482 \times (0.095101)^2 \simeq 0.00477971$

$e_3 \cong Ce_2^2 \simeq 0.528482 \times (0.00477971)^2 \simeq 1.2073 \times 10^{-5}$

Con la cota $e_n \leq \dfrac{1}{M}(Me_0)^{2^n}$ y teniendo en cuenta que $M \simeq 0.9725$, $\quad e_0 \leq 1/2$, $\quad Me_0 < 1/2$, obtenemos

$$e_n \leq \frac{1}{M}(Me_0)^{2^n} = \frac{1}{M}Me_0(Me_0)^{2^n-1} = e_0(Me_0)^{2^n-1} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2^n-1} = 2^{-2^n}$$

Hacemos $e_n \leq 2^{-2^n} \leq 10^{-15}$ luego $2^n \geq 15/\log_{10} 2$ y obtenemos $n \geq \log(15/\log_{10} 2)/\log(2) \simeq 5.63$.

Por tanto, con n=6 iteraciones obtenemos 15 cifras de precisión

$e_6 \leq 2^{-2^6} = 2^{-64} \simeq 5.42 \times 10^{-20}$.

La estimación obtenida antes es $e_3 \simeq 1.2073 \times 10^{-5}$ y la cota obtenida ahora es

$e_3 \leq 2^{-2^3} = 2^{-8} \simeq 3.9 \times 10^{-3}$. Como $1.2073 \times 10^{-5} \leq 3.9 \times 10^{-3}$, la estimación obtenida verifica la cota.

Problema 2: Solución

a)

$$1^{\text{o}}\ \text{L c = b} \rightarrow \quad c \approx \begin{pmatrix} 47.0 \\ 58.9345 \end{pmatrix}$$

$$2^o \text{ U x = c} \rightarrow \; x \approx \begin{pmatrix} 10 \\ 1.0 \end{pmatrix}$$

b)

$$b' - b = Ax' - b \qquad \begin{pmatrix} 5.31 & -6.10 \\ 0.03 & 58.9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 30.0 \\ 0.9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 47.0 \\ 59.2 \end{pmatrix} \approx \begin{pmatrix} 106.81 \\ -5.2900 \end{pmatrix}$$

c)

$$\frac{\|x - x'\|}{\|x\|} \leq cond(A) \frac{\|b - b'\|}{\|b\|}$$

$$\|x - x'\|_\infty = 20 \qquad \|x\|_\infty = 10 \qquad \|r\|_\infty = 106.81 \qquad \|b\|_\infty = 59.20$$

$$cond(A) \geq 1.1085$$